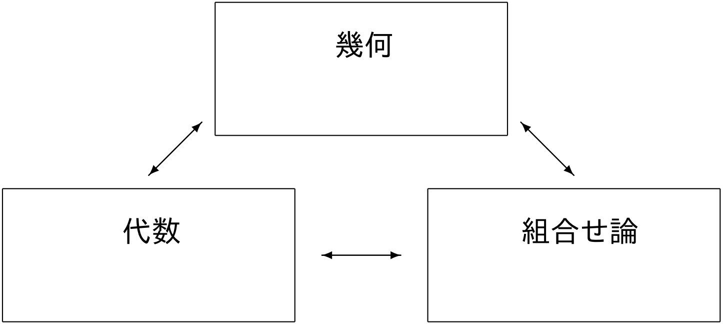
ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

堀口　達也
共同研究者：阿部拓、原田芽ぐみ、枡田幹也
共同研究者：阿部拓郎、枡田幹也、村井聡、佐藤敬志

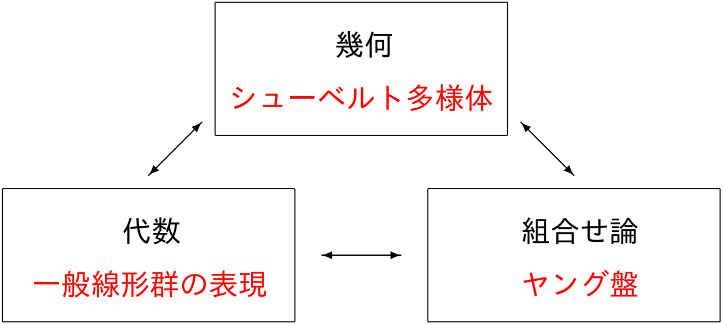
大阪大学、大阪市立大学数学研究所

第６４回トポロジーシンポジウム
平成２９年８月２４日

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置



ヘッセンバーグ多様体と超平面配置



- グラスマン多様体のシューベルトカルキュラス

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

幾何

シューベルト多様体

代数

一般線形群の表現

組合せ論

ヤング盤

- グラスマン多様体のシューベルトカルキュラス
- 旗多様体のシューベルトカルキュラス

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

旗多様体 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ の定義：

$$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) := \{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

旗多様体 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ の定義：

$$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) := \{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

$\mathrm{Hess}(X, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ Hessenberg 多様体

$$\begin{pmatrix} X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n & \text{線形写像} \\ h : [n] \to [n] & \text{Hessenberg 関数} \end{pmatrix}$$

Hessenberg 多様体の歴史

- Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ の導入
  DeMari-Shayman 1988
  DeMari-Procesi-Shayman 1992

Hessenberg 多様体の歴史

- Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ の導入
  DeMari-Shayman 1988
  DeMari-Procesi-Shayman 1992

- その他の流れ

· Springer 多様体 $\cdots$ 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の幾何学的表現の実現！
(1970 年代後半)
· Peterson 多様体 $\cdots$ 旗多様体の量子コホモロジーと関連！
(1990 年代後半)

$\rightsquigarrow$ Hessenberg 多様体: Springer 多様体, Peterson 多様体を統一

Hessenberg 多様体の歴史

- Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ の導入
  DeMari-Shayman 1988
  DeMari-Procesi-Shayman 1992

- その他の流れ

· Springer 多様体 $\cdots$ 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の幾何学的表現の実現！
(1970 年代後半)
· Peterson 多様体 $\cdots$ 旗多様体の量子コホモロジーと関連！
(1990 年代後半)

$\rightsquigarrow$ Hessenberg 多様体: Springer 多様体, Peterson 多様体を統一

Tymoczko, Insko, Mbirika, Teff, Drellich, Precup, . . .
により 2000 年代頃から研究.

最近の発展

$\mathrm{Hess}(X, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ Hessenberg 多様体

最近の発展

$\mathrm{Hess}(X,h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ Hessenberg 多様体

- $X = S$ regular semisimple
  $\Rightarrow \mathfrak{S}_n \curvearrowright H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ (Tymoczko)

最近の発展

$\mathrm{Hess}(X, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ Hessenberg 多様体

- $X = S$ regular semisimple
  $\Rightarrow \mathfrak{S}_n \curvearrowright H^*(\mathrm{Hess}(S, h))$ (Tymoczko)
  $\Rightarrow \mathfrak{S}_n$-表現 $H^*(\mathrm{Hess}(S, h))$ はグラフ理論と綺麗な対応！
  (Shareshian-Wachs, Brosnan-Chow, ...)

最近の発展

$\mathrm{Hess}(X,h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ Hessenberg 多様体

- $X = S$ regular semisimple
  $\Rightarrow \mathfrak{S}_n \curvearrowright H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ (Tymoczko)
  $\Rightarrow \mathfrak{S}_n$-表現 $H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ はグラフ理論と綺麗な対応！
  (Shareshian-Wachs, Brosnan-Chow, . . .)

- $X = N$ regular nilpotent
  $\Rightarrow H^*(\mathrm{Hess}(N,h))$ は超平面配置と関連！
  (Sommers-Tymoczko, Abe-H-Masuda-Murai-Sato)

Hessenberg 関数の定義

$h : [n] \to [n]$ Hessenberg 関数 $:\Longleftrightarrow$ $h(1) \le h(2) \le \dots \le h(n)$
$([n] := \{1, 2, \dots, n\})$ $h(i) \ge i \ (i = 1, 2, \dots, n)$

$h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$ と表す.

Hessenberg 関数の定義

$h : [n] \to [n]$ Hessenberg 関数 $:\Longleftrightarrow$ $h(1) \leq h(2) \leq \ldots \leq h(n)$
$([n] := \{1, 2, \ldots, n\})$ $h(i) \geq i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

$h = (h(1), h(2), \ldots, h(n))$ と表す.

例 $n = 5$ とする. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ は Hessenberg 関数.

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

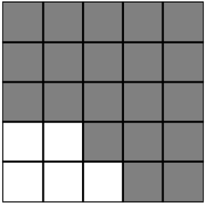
Hessenberg 関数

Hessenberg 関数の定義

$h : [n] \to [n]$ Hessenberg 関数 $:\Longleftrightarrow$ $h(1) \leq h(2) \leq \ldots \leq h(n)$
$([n] := \{1, 2, \ldots, n\})$ $h(i) \geq i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

$h = (h(1), h(2), \ldots, h(n))$ と表す.

例 $n = 5$ とする. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ は Hessenberg 関数.



Hessenberg 多様体の定義

$X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 線形写像.
$h : [n] \to [n]$ Hessenberg 関数.
Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ の定義:

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

Hessenberg 多様体の定義

$X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 線形写像.
$h : [n] \to [n]$ Hessenberg 関数.
Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ の定義:

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) \cong G/B$ $(G = GL_n(\mathbb{C}), B = \{$ 上三角行列 $\})$ のもと,

$$\mathrm{Hess}(X, H) := \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})(X) \in H\}$$

$X \in \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$
$H \subset \mathfrak{g}$ Hessenberg 空間 (Hessenberg 関数 h と 1 対 1 に対応)

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

Hessenberg 空間

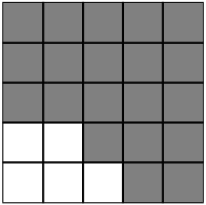
Hessenberg 空間の定義

$$H \subset \mathfrak{g} \text{ Hessenberg 空間} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} H \supset \mathfrak{b} := \mathrm{Lie}(B) \\ H : \mathfrak{b}\text{-submodule} \end{array}$$

Hessenberg 空間の定義

$H \subset \mathfrak{g}$ Hessenberg 空間 $:\Longleftrightarrow$ $H \supset \mathfrak{b} := \mathrm{Lie}(B)$
H : $\mathfrak{b}$-submodule

例 $h = (3,3,4,5,5)$: Hessenberg 関数

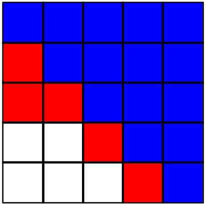


$\leftrightsquigarrow$ $H = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha}$

Hessenberg 空間の定義

$H \subset \mathfrak{g}$ Hessenberg 空間 $:\iff$ $H \supset \mathfrak{b} := \mathrm{Lie}(B)$, H : $\mathfrak{b}$-submodule

例 $h = (3,3,4,5,5)$: Hessenberg 関数



$\rightsquigarrow$ $H = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha}$

$I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2\}$

Hessenberg 多様体の例

Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ の定義:

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

Hessenberg 多様体の例

Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ の定義:

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

X: 零写像 または $h = (n, n, \ldots, n) \Rightarrow \mathrm{Hess}(X,h)$ は旗多様体.

Hessenberg 多様体の例

Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ の定義:

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

X: 零写像 または $h = (n, n, \ldots, n) \Rightarrow \mathrm{Hess}(X,h)$ は旗多様体.
X: nilpotent かつ $h = \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{Hess}(X,h)$ は Springer 多様体.

Hessenberg 多様体の名前

X: nilpotent $\Rightarrow$ $\mathrm{Hess}(X, h)$: nilpotent Hessenberg 多様体
X: semisimple $\Rightarrow$ $\mathrm{Hess}(X, h)$: semisimple Hessenberg 多様体
X: regular $\Rightarrow$ $\mathrm{Hess}(X, h)$: regular Hessenberg 多様体

Hessenberg 多様体の名前

X: nilpotent $\Rightarrow$ $\mathrm{Hess}(X,h)$: nilpotent Hessenberg 多様体
X: semisimple $\Rightarrow$ $\mathrm{Hess}(X,h)$: semisimple Hessenberg 多様体
X: regular $\Rightarrow$ $\mathrm{Hess}(X,h)$: regular Hessenberg 多様体

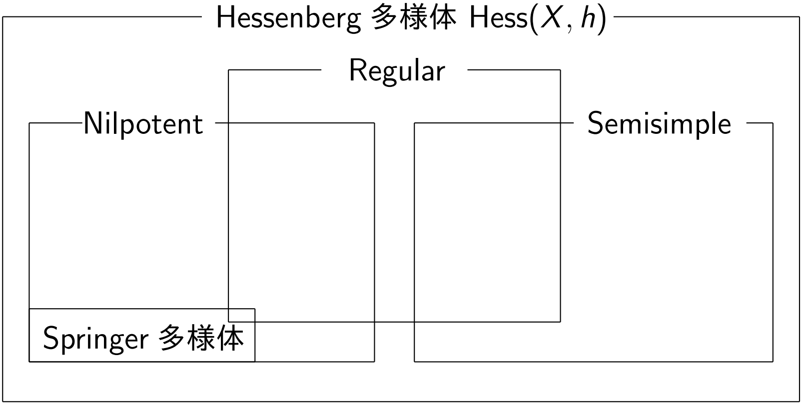
N: regular nilpotent, S: regular semisimple

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

ただし, $i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j$.

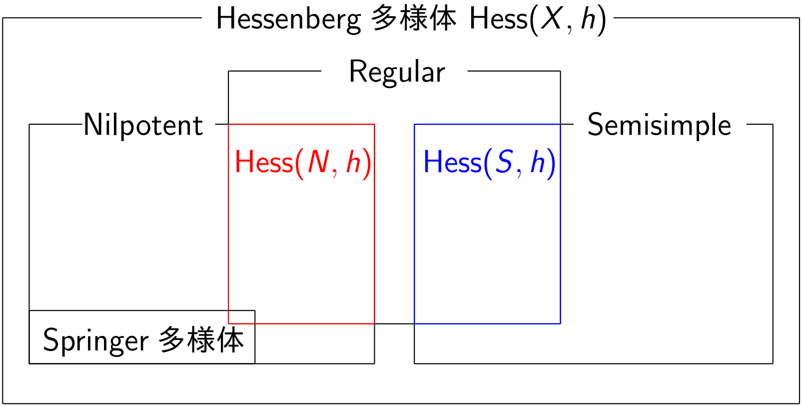
ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

Hessenberg 多様体の例 (まとめ)



ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

Hessenberg 多様体の例 (まとめ)



ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

$\mathrm{Hess}(N, h)$ v.s. $\mathrm{Hess}(S, h)$

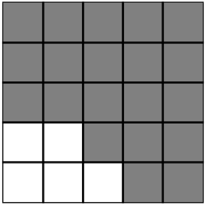
	$\mathrm{Hess}(N, h)$	$\mathrm{Hess}(S, h)$
$h = (n, n, \ldots, n)$	旗多様体	旗多様体
$h = (2, 3, 4, \ldots, n, n)$	Peterson 多様体	トーリック多様体
特異性	(一般に) 特異	非特異
複素次元	$\sum_{j=1}^{n}(h(j) - j)$	$\sum_{j=1}^{n}(h(j) - j)$

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

Hess(N, h) v.s. Hess(S, h)

	Hess(N, h)	Hess(S, h)
$h = (n, n, \ldots, n)$	旗多様体	旗多様体
$h = (2, 3, 4, \ldots, n, n)$	Peterson 多様体	トーリック多様体
特異性	(一般に) 特異	非特異
複素次元	$\sum_{j=1}^{n}(h(j) - j)$	$\sum_{j=1}^{n}(h(j) - j)$

例 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$: Hessenberg 関数

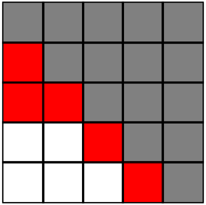


ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

Hess(N,h) v.s. Hess(S,h)

	Hess(N,h)	Hess(S,h)
$h=(n,n,\ldots,n)$	旗多様体	旗多様体
$h=(2,3,4,\ldots,n,n)$	Peterson 多様体	トーリック多様体
特異性	(一般に) 特異	非特異
複素次元	$\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$	$\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$

<u>例</u> $h=(3,3,4,5,5)$: Hessenberg 関数



$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hess}(N,h) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hess}(S,h) = 5$$

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

主結果 1

定理 1 [阿部 (拓)-原田-堀口-枡田]

次の環同型が成立：

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \cong \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,f_2,\ldots,f_n)$$

ここで $\deg x_i = 2$, 各 f_j は以下で定義される多項式：

$$f_j := \sum_{k=1}^{j} \Big(\prod_{\ell=j+1}^{h(j)} (x_k - x_\ell) \Big) x_k \qquad 1 \le j \le n$$

定理 1 [阿部 (拓)-原田-堀口-枡田]

次の環同型が成立：

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \cong \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,f_2,\ldots,f_n)$$

ここで $\deg x_i = 2$, 各 f_j は以下で定義される多項式：

$$f_j := \sum_{k=1}^{j} \Big(\prod_{\ell=j+1}^{h(j)} (x_k - x_\ell) \Big) x_k \qquad 1 \leq j \leq n$$

系 [阿部 (拓)-原田-堀口-枡田]

$H^*(\mathrm{Hess}(N,h))$ は Poincaré 双対代数 (PDA).

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

主結果 2

定理 2 [阿部 (拓)-原田-堀口-枡田]

次の環同型が成立：

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで $H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ 上の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用は Tymoczko により導入されたもの.

定理 2 [阿部 (拓)-原田-堀口-枡田]

次の環同型が成立：

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで $H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ 上の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用は Tymoczko により導入されたもの.

(証明の概略)

$$\begin{tikzcd}
& H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \arrow[rr, "\cong"] & & H^*(\mathrm{Hess}(S,h))^{\mathfrak{S}_n}
\end{tikzcd}$$

定理 3 [阿部 (拓郎)-堀口-枡田-村井-佐藤]

任意の Lie type で次の環同型が成立:

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,H)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}(H) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,H))^W$$

ここで W: Weyl 群, $\mathcal{R} = \mathrm{Sym}\ \mathfrak{t}^*$.

定理 3 [阿部 (拓郎)-堀口-枡田-村井-佐藤]

任意の Lie type で次の環同型が成立:

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,H)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}(H) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,H))^W$$

ここで W: Weyl 群, $\mathcal{R} = \mathrm{Sym}\ \mathfrak{t}^*$.

$\mathfrak{a}(H)$: 超平面配置から得られるもの！

主結果 3

定理 3 [阿部 (拓郎)-堀口-枡田-村井-佐藤]

任意の Lie type で次の環同型が成立:

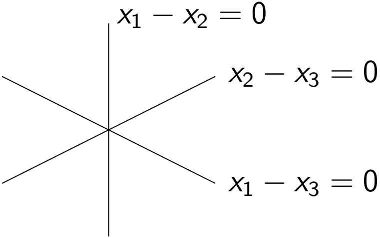
$$H^*(\mathrm{Hess}(N,H)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}(H) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,H))^W$$

ここで W: Weyl 群, $\mathcal{R} = \mathrm{Sym}\ \mathfrak{t}^*$.

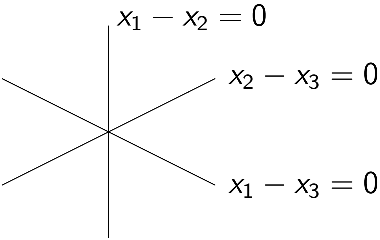
$\mathfrak{a}(H)$: 超平面配置から得られるもの！

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(G/B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
H^*(\mathrm{Hess}(N,H)) & \mathcal{R}/\mathfrak{a}(H) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & H^*(\mathrm{Hess}(S,H))^W
\end{tikzcd}$$

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

対数的導分 $D(\mathcal{A})$

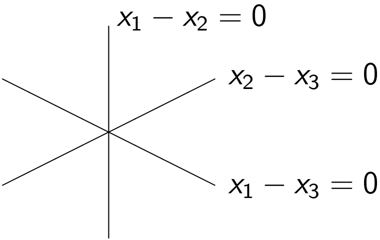
$$\{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \mid \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j) \quad 1 \leq i < j \leq 3\}$$

($\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ とする.)

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

超平面配置

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

対数的導分 $D(\mathcal{A})$

$$\left\{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \;\middle|\; \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j) \quad 1 \le i < j \le 3\right\}$$

($\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ とする.)

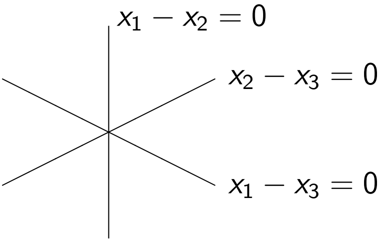
- $D(\mathcal{A})$ の元の例:

$$\theta_0 := \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\because \ \theta_0(x_i - x_j) = 1 - 1 = 0 \in (x_i - x_j))$$

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

超平面配置

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

対数的導分 $D(\mathcal{A})$

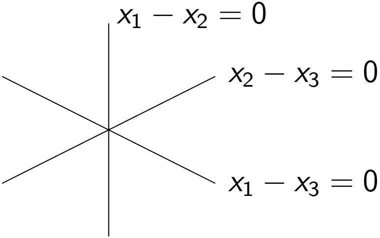
$$\{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \mid \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j)\ \ 1 \le i < j \le 3\}$$

$(\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ とする.)

- $D(\mathcal{A})$ の元の例:

$$\theta_0 := \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\because\ \theta_0(x_i - x_j) = 1 - 1 = 0 \in (x_i - x_j))$$
$$\theta_1 := x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} \ (\because\ \theta_1(x_i - x_j) = x_i - x_j \in (x_i - x_j))$$

<u>超平面配置 $\mathcal{A}$</u> (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

<u>対数的導分 $D(\mathcal{A})$</u>

$$\{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \mid \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j) \quad 1 \leq i < j \leq 3\}$$

($\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ とする.)

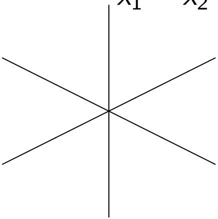
- $D(\mathcal{A})$ の元の例:

$$\theta_0 := \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\because \ \theta_0(x_i - x_j) = 1 - 1 = 0 \in (x_i - x_j))$$

$$\theta_1 := x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} \ (\because \ \theta_1(x_i - x_j) = x_i - x_j \in (x_i - x_j))$$

$$\theta_2 := x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2\frac{\partial}{\partial x_3} \ (\because \ \theta_2(x_i - x_j) = x_i^2 - x_j^2 \in (x_i - x_j))$$

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

対数的導分 $D(\mathcal{A})$

$$\{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \mid \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j) \quad 1 \leq i < j \leq 3\}$$

($\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ とする.)

- $D(\mathcal{A})$ の元の例:

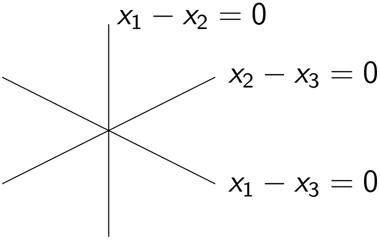
$$\theta_0 := \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\because\ \theta_0(x_i - x_j) = 1 - 1 = 0 \in (x_i - x_j))$$
$$\theta_1 := x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\because\ \theta_1(x_i - x_j) = x_i - x_j \in (x_i - x_j))$$
$$\theta_2 := x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2\frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\because\ \theta_2(x_i - x_j) = x_i^2 - x_j^2 \in (x_i - x_j))$$

- $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ は $D(\mathcal{A})$ の $\mathcal{R}$ 上基底をなす.

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

超平面配置

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

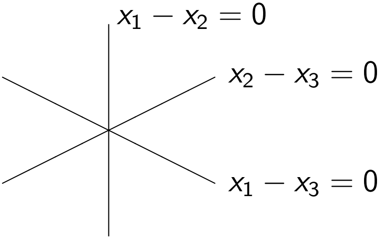
対数的導分 $D(\mathcal{A})$

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{R}\theta_0 \bigoplus \mathcal{R}\theta_1 \bigoplus \mathcal{R}\theta_2$$

$$\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$$

$$\theta_k := x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^k \frac{\partial}{\partial x_3}$$

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

対数的導分 $D(\mathcal{A})$

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{R}\theta_0 \bigoplus \mathcal{R}\theta_1 \bigoplus \mathcal{R}\theta_2$$

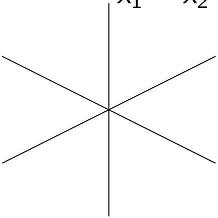
$$\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$$

$$\theta_k := x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^k \frac{\partial}{\partial x_3}$$

イデアル $\mathfrak{a}$ (of $\mathcal{R}$) $\quad Q := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ とする.

$$\mathfrak{a} := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\} = (\theta_0(Q), \theta_1(Q), \theta_2(Q))$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

超平面配置 $\mathcal{A}$ (in $\mathbb{R}^3$)



$\rightsquigarrow$

対数的導分 $D(\mathcal{A})$

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{R}\theta_0 \bigoplus \mathcal{R}\theta_1 \bigoplus \mathcal{R}\theta_2$$

$$\mathcal{R} := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$$

$$\theta_k := x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^k \frac{\partial}{\partial x_3}$$

イデアル $\mathfrak{a}$ (of $\mathcal{R}$)　　$Q := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ とする.

$$\mathfrak{a} := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\} = (\theta_0(Q), \theta_1(Q), \theta_2(Q))$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

$$H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^3)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}$$

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

旗多様体と超平面配置

- 旗多様体と超平面配置

$\mathcal{A} = \{x_i - x_j = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i < j \leq n\}$: Weyl 配置

$$\rightsquigarrow D(\mathcal{A}) = \{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \mid \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j) \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

$(\mathcal{R} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n])$

$\rightsquigarrow \mathfrak{a} = \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\}$: $\mathcal{R}$ のイデアル

$(Q = x_1^2 + \cdots + x_n^2$: $\mathfrak{S}_n$-不変な非退化な 2 次形式)

- 旗多様体と超平面配置

$$\mathcal{A} = \{x_i - x_j = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i < j \leq n\} : \text{Weyl 配置}$$

$$\rightsquigarrow D(\mathcal{A}) = \{\theta \in \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{R}\frac{\partial}{\partial x_k} \mid \theta(x_i - x_j) \in (x_i - x_j) \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$(\mathcal{R} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n])$$

$$\rightsquigarrow \mathfrak{a} = \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\} : \mathcal{R} \text{ のイデアル}$$

$(Q = x_1^2 + \cdots + x_n^2 : \mathfrak{S}_n$-不変な非退化な 2 次形式$)$

定理 [斎藤]

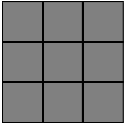
次の環同型が成立:

$$H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}$$

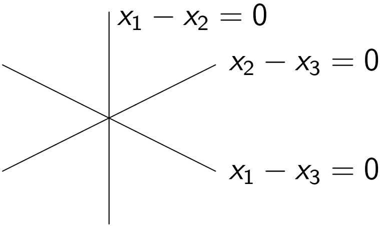
ヘッセンバーグ関数 h

超平面配置 $\mathcal{A}_h$

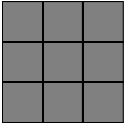
$h =$

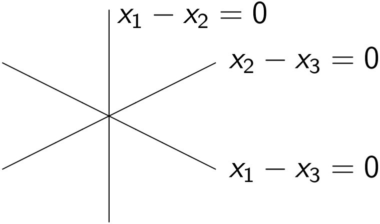


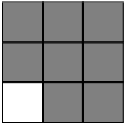
$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_h$:

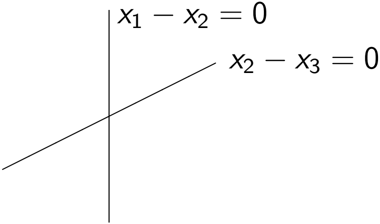


ヘッセンバーグ関数 h 　　　　超平面配置 $\mathcal{A}_h$

$h =$  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_h$:



$h' =$  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_{h'}$:

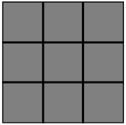


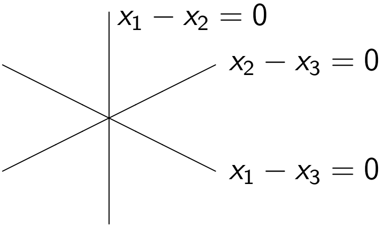
ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

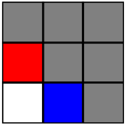
超平面配置

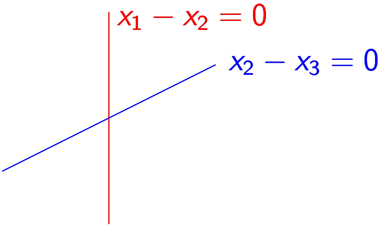
ヘッセンバーグ関数 h

超平面配置 $\mathcal{A}_h$

$h =$  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_h$:



$h' =$  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_{h'}$:



- ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

$$
\begin{aligned}
&h : \text{ヘッセンバーグ関数} \\
\rightsquigarrow &\mathcal{A}_h : \text{Weyl 配置の部分配置} \\
\rightsquigarrow &D(\mathcal{A}_h) : \text{対数的導分からなる } \mathcal{R}\text{-加群} \\
&(\mathcal{R} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]) \\
\rightsquigarrow &\mathfrak{a}(h) = \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_h)\} : \mathcal{R} \text{ のイデアル} \\
&(Q = x_1^2 + \cdots + x_n^2 : \mathfrak{S}_n\text{-不変な非退化な 2 次形式})
\end{aligned}
$$

- ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

$$h : \text{ヘッセンバーグ関数}$$
$$\rightsquigarrow \mathcal{A}_h : \text{Weyl 配置の部分配置}$$
$$\rightsquigarrow D(\mathcal{A}_h) : \text{対数的導分からなる } \mathcal{R}\text{-加群}$$
$$(\mathcal{R} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n])$$
$$\rightsquigarrow \mathfrak{a}(h) = \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_h)\} : \mathcal{R} \text{ のイデアル}$$
$$(Q = x_1^2 + \cdots + x_n^2 : \mathfrak{S}_n\text{-不変な非退化な 2 次形式})$$

定理 [阿部 (拓郎)-堀口-枡田-村井-佐藤]

次の環同型が成立:

$$H^*(\mathrm{Hess}(N, h)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}(h)$$

$H^*(\mathrm{Hess}(N,H)) \cong \mathcal{R}/\mathfrak{a}(H)$ の応用

系 [阿部 (拓郎)-堀口-枡田-村井-佐藤]

(1) 任意の Lie type で, 次が成立.

- 制限写像 $H^*(G/B) \to H^*(\mathrm{Hess}(N,H))$ は全射.
- $H^*(\mathrm{Hess}(N,H))$ は Poincaré 双対代数 (PDA).

(2) Sommers-Tymoczko 予想は正しい：

$$\sum_{Y \in \mathcal{W}^H} q^{|Y|} = \prod_{i=1}^{n} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{d_i^H})$$

(3) type B, C, G で, $H^*(\mathrm{Hess}(N,H))$ の明示的表示が得られる.

Open Problem

(1) type D, E, F で, $H^*(\mathrm{Hess}(N, H))$ の明示的表示は？

(2) $H^*(\mathrm{Hess}(S, h))$ の明示的表示は？
($h = (h(1), n, \ldots, n)$ のとき, [阿部 (拓)-堀口-枡田].)

(3) X_λ: regular, Jordan block のサイズが $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$.
このとき, 次の環同型は正しいか？

$$H^*(\mathrm{Hess}(X_\lambda, h)) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_\lambda}$$

ここで, $\mathfrak{S}_\lambda := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_\ell}$ を表す.

参考文献

[1] Abe-Harada-Horiguchi-Masuda, *The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A*, arXiv:1512.09072

[2] Abe-Horiguchi-Masuda-Murai-Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, arXiv:1611.00269

謝辞

志摩亜希子先生
小川竜先生
遠藤久顕先生
大鹿健一先生

有難うございました.