$K(n)$-local category のモデルについて

鳥居　猛

(岡山大学大学院自然科学研究科)

内容

安定ホモトピー論の一分野であるクロマティックホモトピー論 (chromatic homotopy theory) において、$K(n)$-local category は非常に重要な位置を占めています。

この講演では Morava E 理論およびその安定化群 $\mathbb{G}_n$ を用いた $K(n)$-local category のモデルの構成についてお話します。

- クロマティックホモトピー論
- ∞-categorical Barr-Beck theorem
- $K(n)$-local category のモデル

クロマティックホモトピー論

クロマティックホモトピー論は安定ホモトピー圏を調べる一つの方法を与えます。

クロマティックホモトピー論について紹介する前に、まずは安定ホモトピー圏 (スペクトラムのホモトピー圏) について思い出しておきます。

安定ホモトピー圏は基点付き空間のホモトピー圏のある意味での線型化と考えることができます。

$X, Y \in \mathbf{Space}_*$: 基点付き CW 複体

$[X, Y]$: 基点付き連続写像のホモトピー類のなす集合

$\Sigma X, \Sigma Y$: X, Y の懸垂 (サスペンション)

$X \wedge Y$: X と Y のスマッシュ積

安定ホモトピー圏

懸垂をとる操作により基点付き集合の写像が得られる。

$$\Sigma : [X, Y] \to [\Sigma X, \Sigma Y]$$

$$f \mapsto \Sigma f$$

これを繰り返すと、基点付き集合とその間の写像の列が得られる。

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y] \xrightarrow{\Sigma} \cdots$$

いま、$X, Y \in \mathbf{Space}_*^{\mathrm{fin}}$ を有限 CW 複体とすると、この列は十分先では同型になっている。

$$\{X, Y\} = \operatorname*{colim}_i \, [\Sigma^i X, \Sigma^i Y]$$

また、$\{X, Y\}$ はアーベル群の構造をもつ。

$\mathbf{Ho(Sp)}$: 安定ホモトピー圏

$\mathbf{Ho(Sp)}$ の性質

- $\mathbf{Ho(Sp)}$ は加法圏である。
特に、その射の集合を $[X, Y]$ $(X, Y \in \mathbf{Ho(Sp)})$ で表すと、$[X, Y]$ は
アーベル群である。

- 関手 $\Sigma^\infty : \mathbf{Ho(Space_*)} \to \mathbf{Ho(Sp)}$ が存在し、
$X, Y \in \mathbf{Space}_*^{\mathbf{fin}}$ に対して、

$$[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y] \cong \{X, Y\}$$

が成り立つ。

安定ホモトピー圏

- 安定ホモトピー圏 $\mathbf{Ho(Sp)}$ はテンソル三角圏である。
  - シフト関手は懸垂 ΣX で与えられる。
  - 完全三角形はコファイバー列

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Cf \longrightarrow \Sigma X$$

で与えられる。ここで、Cf は f の写像錐である。
  - テンソル積はスマッシュ積 $X \wedge Y$ で与えられ、単位対象は球面スペクトラム $S = \Sigma^\infty S^0$ である。

<u>安定ホモトピー圏 $\mathbf{Ho(Sp)}$ の構造を理解したい。</u>

複素向き付け可能コホモロジー理論

安定ホモトピー圏 $\mathbf{Ho(Sp)}$、特に、有限スペクトラムからなる充満部分圏 $\mathbf{Ho(Sp^{fin})}$ は、複素コボルディズム $\boldsymbol{MU}$ を通して形式群と密接に関係してます。

ここでは、形式群と複素向き付け可能コホモロジー理論との関係についてみていきます。

複素向き付け可能なコホモロジー理論とは、複素ベクトル束に対して Thom 類が定義できて、Thom 同型が成り立つような一般コホモロジー論のことです。

このとき、通常のコホモロジー論と同様に複素ベクトル束に対して Chern 類の理論を展開することができます。

複素向き付け可能コホモロジー理論

$E^*(-)$: 複素向き付けられたコホモロジー論

空間 X 上の複素ベクトル束 $V \to X$ に対して、

$$c_i^E(V) \in E^{2i}(X)$$

で $E^*(-)$ における V の ith Chern 類を表すことにする。

このとき、通常の Chern 類の理論と同様なことが成り立ちます。

通常の Chern 類の理論との違いは、ベクトル束のテンソル積の Chern 類をそれぞれのベクトル束の Chern 類で表そうとするときに現れます。

L_1, L_2: 空間 X 上の複素直線束

このとき、任意の X, L_1, L_2 に対して、次が成り立つような形式的べき級数 $F(x, y) \in E^*(\mathrm{pt})[\![x, y]\!]$ が一意的に存在する。

$$c_1^E(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2) = F(c_1^E(L_1), c_1^E(L_2))$$

複素向き付け可能コホモロジー理論

例　通常のコホモロジー $E^*(-) = H^*(-;\mathbb{Z})$ のとき

$$c_1(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$$

より、

$$F(x, y) = x + y \in \mathbb{Z}[\![x, y]\!]$$

が対応します。

一般にこのべき級数 $F(x, y) \in E^*(\mathrm{pt})[\![x, y]\!]$ は次の代数的な性質を満たすことがわかります。

1. $F(x, 0) = x = F(0, x)$
2. $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$
3. $F(x, y) = F(y, x)$

一般に、可換環 R 上のべき級数 $F(x, y) \in R[\![x, y]\!]$ が上の 3 つの性質を満たすとき、$F(x, y)$ を R 上の (1 次元可換) 形式群という。

複素コボルディズムと形式群のモジュライ空間

$MU^*(-)$: 複素コボルディズム理論とすると、

$MU^*(-)$ は自然な複素向き付けをもつコホモロジー理論

さらに $MU^*(-)$ は複素向き付けられたコホモロジー理論の中で普遍的なものになっています。

$$E^*(-) \longrightarrow MU^*(-)$$

また、MU に対応する形式群も普遍性をもちます。

このことが示唆しているように MU と形式群とは密接に関係しています。ここでは、MU と形式群のモジュライ空間との関係について述べます。

複素コボルディズムと形式群のモジュライ空間

$\mathcal{M}_{\mathbf{FG}}$: 形式群のモジュライ空間 (moduli stack of formal groups)

大雑把には

$$\mathbf{Spec}(R) \to \mathcal{M}_{\mathbf{FG}} \iff R \text{ 上の形式群の同型類}$$

$\mathbf{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathbf{FG}})$: $\mathcal{M}_{\mathbf{FG}}$ 上の ($\mathbb{Z}/\mathbf{2}$-次数付き準連接) 層のなすアーベル圏

このとき、$MU_*(-)$ は $\mathbf{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathbf{FG}})$ に値をもつ関手と考えることができる。

$$MU_*(-) : \mathbf{Ho(Sp)} \longrightarrow \mathbf{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathbf{FG}})$$

素数 p を固定

$$\mathcal{M}_{\mathbf{FG},(p)} := \mathcal{M}_{\mathbf{FG}} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

$\mathcal{M}_{\mathbf{FG},(p)}$ の性質についてみていきます。

複素コボルディズムと形式群のモジュライ空間

k: 標数 p の体

$F(x,y)$: k 上の形式群　$(x +_F y = F(x,y))$

自然数 n に対して n-series $[n]^F(x) \in k[\![x]\!]$ を n 倍和

$$[n]^F(x) = \overbrace{x +_F \cdots +_F x}^{n}$$

で定義します。このとき、$[p]^F(x) \neq 0$ ならば、

$$[p]^F(x) = ax^{p^n} + (\text{higher terms}), \quad 0 \neq a \in k$$

このとき、$\mathrm{ht}_p(F) = n$ で表すことにする。

また、$[p]^F(x) = 0$ のとき、$\mathrm{ht}_p(F) = \infty$ とする。

(k が標数 0 の体のとき、$\mathrm{ht}_p(F) = 0$ とする。)

形式群の高さは同型なものに対して同じ値をとる不変量

複素コボルディズムと形式群のモジュライ空間

$\mathcal{M}^{\geq n}_{\mathrm{FG},(p)}$: 高さが n 以上の形式群の同型類に対応する $\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)}$ の閉部分空間

$\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)}$ の閉部分空間によるフィルトレイションが得られる。

$$\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)} = \mathcal{M}^{\geq 0}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \mathcal{M}^{\geq 1}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{M}^{\geq n}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{M}^{\infty}_{\mathrm{FG},(p)}$$

ここで、$\mathcal{M}^{\infty}_{\mathrm{FG},(p)} = \bigcap_n \mathcal{M}^{\geq n}_{\mathrm{FG},(p)}$ である。

このフィルトレイションを用いて、安定ホモトピー圏にフィルトレイションを導入します。

クロマティック・フィルトレイション

p: 素数を固定

X: p-局所スペクトラム $\Longleftrightarrow$ ホモトピー群 $\pi_*(X)$ が $\mathbb{Z}_{(p)}$-加群

$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$: p-局所スペクトラムからなる $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$ の充満部分圏

$\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$: $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$ の充満部分圏

$$\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} = \{X \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}) | \operatorname{supp} MU_*(X) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)}^{\geq n}\}$$

このとき、$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$ の localizing subcategory からなるフィルトレイションが得られる。

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}) = \mathcal{S}_{(p)}^{\geq 0} \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\geq 1} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\infty}$$

ここで、$\mathcal{S}_{(p)}^{\infty} = \bigcap_n \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ である。

Morava K 理論

素数 p と自然数 n を固定

Morava K 理論 $K(n)^*(-)$: 複素向き付けられた一般コホモロジー論

$$K(n)^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}], \quad |v_n| = -2(p^n - 1)$$

$F_{K(n)}$: Morava K 理論 $K(n)$ の形式群

$$[p]^{F_{K(n)}}(x) = v_n x^{p^n}$$

よって、$\mathrm{ht}_p F_{K(n)} = n$

(係数環を適当に拡大した)$F_{K(n)}$ の自己同型群を Morava 安定化群といって $\mathbb{G}_n$ で表す。

$$\mathbb{G}_n := \mathrm{Aut}(F_{K(n)})$$

Remark

$\mathbb{G}_n$ は副有限群

Bousfield 局所化

$\mathbf{Ho(Sp_{(p)})}$ の localizing subcategory によるフィルトレイション

$$\mathbf{Ho(Sp_{(p)})} = \mathcal{S}^{\geq 0}_{(p)} \supset \mathcal{S}^{\geq 1}_{(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{S}^{\geq n}_{(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{S}^{\infty}_{(p)}$$

$$\mathcal{S}^{\geq n}_{(p)} = \{X \in \mathbf{Ho(Sp_{(p)})} | \operatorname{supp} MU_*(X) \subset \mathcal{M}^{\geq n}_{FG,(p)}\}$$

について思い出しておきます。

三角圏 $\mathcal{S}^{\geq n}_{(p)}$ の部分三角圏 $\mathcal{S}^{\geq n+1}_{(p)}$ による Verdier 商 $\mathcal{S}^{\geq n}_{(p)}/\mathcal{S}^{\geq n+1}_{(p)}$ は、その構成から想像されるように高さが n の形式群と密接に関係しています。

ここでは、Bousfield 局所化を導入し、安定ホモトピー圏 $\mathbf{Ho(Sp)}$ の Morava K 理論 $K(n)$ による Bousfield 局所化が $\mathcal{S}^{\geq n}_{(p)}/\mathcal{S}^{\geq n+1}_{(p)}$ と同値になることをみます。

Bousfield 局所化

$E_*(-)$: 一般ホモロジー理論

W: E-acyclic spectrum $\Longleftrightarrow$ $E_*(W) = 0$

$N_E := \{W \in \mathrm{Ho(Sp)} \mid W\text{: } E\text{-acyclic}\}$ とおく

N_E は $\mathrm{Ho(Sp)}$ の localizing subcategory

任意の E-acyclic なスペクトラム W に対して $[W, X] = 0$ が成り立つとき、スペクトラム X は E-local であるという。

$\mathrm{Ho(Sp}_E)$: E-local スペクトラムから成る $\mathrm{Ho(Sp)}$ の充満部分圏

$$\mathrm{Ho(Sp}_E) \simeq \mathrm{Ho(Sp)}/N_E$$

$\mathrm{Ho(Sp}_E)$: E-local category という

$$L_E : \mathrm{Ho(Sp)} \to \mathrm{Ho(Sp)}/N_E \simeq \mathrm{Ho(Sp}_E) \hookrightarrow \mathrm{Ho(Sp)}$$

Bousfield 局所化

素数 p と自然数 n を固定

Verdier 商 $\mathcal{S}^{\geq n}_{(p)}/\mathcal{S}^{\geq n+1}_{(p)}$ を monochromatic category といいます。

この monochromatic category は $K(n)$-local category と三角圏として同値になることが知られています。

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp}_{K(n)}) \simeq \mathcal{S}^{\geq n}_{(p)}/\mathcal{S}^{\geq n+1}_{(p)}$$

フィルトレイション

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp}_{(p)}) = \mathcal{S}^{\geq 0}_{(p)} \supset \mathcal{S}^{\geq 1}_{(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{S}^{\geq n}_{(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{S}^{\infty}_{(p)}$$

と三角圏の同値

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp}_{K(n)}) \simeq \mathcal{S}^{\geq n}_{(p)}/\mathcal{S}^{\geq n+1}_{(p)}$$

からわかるように、$K(n)$-local category は、安定ホモトピー圏における基本構成単位と考えることができます。

Morava E 理論

ここでは $K(n)$-local category を調べる上で基本的な道具となる Morava E 理論について述べます。

素数 p と自然数 n を固定

Morava E 理論 $E_n^*(-)$ は複素向き付けられた一般コホモロジー理論

$$E_n^*(\mathrm{pt}) = W[\![u_1, \ldots, u_{n-1}]\!][u^{\pm 1}], \quad |u_i| = 0, |u| = -2$$

ここで、$W = W(\mathbb{F}_{p^n})$ は有限体 $\mathbb{F}_{p^n}$ を係数にもつ Witt vector のなす環

Morava E 理論 E_n の形式群は Morava K 理論 $K(n)$ の (係数環を適当に拡大した) 形式群の普遍変形になっています。

Morava 安定化群 $\mathbb{G}_n$ は $E_n^*(-)$ に乗法的なコホモロジー作用素として作用します。

Morava E 理論

$K(n)$-local category と Morava E 理論との関係は、次のスペクトル系列の存在によって与えられます。

有限スペクトラム X に対して、X の $K(n)$ 局所化 $L_{K(n)}X$ のホモトピー群に収束するスペクトル系列
($K(n)$-local E_n-based Adams spectral sequence)

$$E_2^{s,t} = H_c^s(\mathbb{G}_n; (E_n)_t(X)) \Longrightarrow \pi_{t-s}(L_{K(n)}X)$$

が存在する。

このスペクトル系列の存在は $K(n)$-local category と $\mathbb{G}_n$ 作用をもつ E_n-加群の導来圏 (ホモトピー圏) との関係を示唆しています。

Question

Morava E 理論 E_n と安定化群 $\mathbb{G}_n$ の作用との関係が明示的になるような $K(n)$-local category のモデルは存在するか。

この講演ではこの関係を与えるような $K(n)$-local category のモデルの構成についてお話します。

主定理

細かな説明は後で行うことにして、ここで主定理について述べておきます。

$\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n)$: 離散 $\mathbb{G}_n$ 集合を基にした対称スペクトラムのモデル圏

$\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$: $\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n)$ の $K(n)$ に関する左 Bousfield 局所化

$F_n \in \mathbf{CAlg}(\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n))$: E_n の離散モデル

$\mathbf{Mod}_{F_n}(\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$: $\mathbf{\Sigma Sp}(G)_{K(n)}$ における F_n 加群の圏

このとき、左 Quillen 関手

$$F_n \wedge (-) : \mathbf{\Sigma Sp}_{K(n)} \to \mathbf{Mod}_{F_n}(\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$$

について考える。

Theorem (T.)

左 Quillen 関手

$$\boldsymbol{F_n \wedge (-) : \Sigma\mathrm{Sp}_{K(n)} \to \mathrm{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})}$$

は Quillen 同値である。特に、$\boldsymbol{K(n)}$-local category $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp}_{K(n)})$ はモデル圏 $\mathbf{Mod}_{F_n}(\mathbf{\Sigma Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ のホモトピー圏と (テンソル三角圏として) 同値である。

$$\boldsymbol{\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}))}$$

∞-categorical Barr-Beck theorem

主定理はモデル圏のレベルで述べられますが、その証明では ∞-category を経由しています。

ここでは証明に必要になる ∞-categorical Barr-Beck theorem について触れておきます。

$\mathcal{C}$: ∞-category ($(\infty, 1)$-category の適当なモデル)

object $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して、mapping space

$$\mathbf{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

が定義される。

単体的モデル圏に対して、その underlying ∞-category が定義される。

∞-categorical Barr-Beck Theorem

∞-category における Barr-Beck theorem について考えます。

∞-category の随伴

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

に対して、関手の合成

$$T := G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

は ∞ モナド (モノイダル ∞-category $\mathbf{End}(\mathcal{C}) = \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ におけるモノイド対象) になります。

$\mathbf{Mod}_T(\mathcal{C})$: 左 T 加群のなす ∞-category とすると、比較関手

$$\widetilde{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Mod}_T(\mathcal{C})$$

が定義できて、$G' \circ \widetilde{G} \simeq G$ が成り立ちます。
(ここで、$G' : \mathbf{Mod}_T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は忘却関手)

$\widetilde{G}$ が ∞-category の同値を与えるとき、関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ はモナド的であるという。

∞-categorical Barr-Beck Theorem

∞-categorical Barr-Beck theorem は G がモナド的であるための必要十分条件を与えます。

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

Theorem (∞-categorical Barr-Beck theorem (Lurie))

G がモナド的であるための必要十分条件は、G に関して次の 2 つの条件が成り立つことである。

1. G は conservative である。
2. $\mathcal{D}$ における任意の G-split simplicial object に対して colimit が存在し、G はその colimit を保つ。

以下では、この定理の双対を用います。

離散対称 G スペクトラム

Morava E 理論 E_n と安定化群 $\mathbb{G}_n$ の作用との関係が明示的になるような $K(n)$-local category のモデルを構成するため、

副有限群 G の作用をもつスペクトラムの一つの定式化である離散対称 G スペクトラムを導入します。($\mathbb{G}_n$ は副有限群)

副有限群 G が集合 X に作用しているとする。

X: 離散 G 集合 $\Longleftrightarrow$ 集合 X に離散位相を入れたとき、この作用が連続になる

$\mathbf{Set}(G)$: 離散 G 集合と G 同変射の圏

$\mathbf{SSet}(G)$: 圏 $\mathbf{Set}(G)$ に値をもつ単体的対象のなす圏

$\Sigma\mathbf{Sp}(G)$: $\mathbf{SSet}(G)$ 上の対称スペクトラムの圏

離散対称 G スペクトラム

$\mathbf{\Sigma Sp}(G)$ は対称モノイダル圏の構造をもち、また、単体的安定モデル圏になっています。

$\mathbf{\Sigma Sp}(G)_k$: $\mathbf{\Sigma Sp}(G)$ の k に関する左 Bousfield 局所化 (k: 対称スペクトラム)

$\mathbf{Mod}_A(\mathbf{\Sigma Sp}(G)_k)$: $\mathbf{\Sigma Sp}(G)_k$ における A 加群の圏 (A: $\mathbf{\Sigma Sp}(G)$ のモノイド対象)

$\mathbf{Mod}_A(\mathbf{\Sigma Sp}(G)_k)$ は単体的安定モデル圏になっています。

離散対称 G スペクトラム

$\boldsymbol{U : \Sigma\mathrm{Sp}(G)_k \to \Sigma\mathrm{Sp}_k}$: $\boldsymbol{G}$ の作用を忘れる関手

$\boldsymbol{U}$ は関手

$$\boldsymbol{U : \mathrm{Mod}_A(\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k) \to \mathrm{Mod}_{UA}(\Sigma\mathrm{Sp}_k)}$$

を誘導し、単体的 Quillen 随伴

$$\boldsymbol{U : \mathrm{Mod}_A(\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{UA}(\Sigma\mathrm{Sp}_k) : V}$$

および、∞-category の随伴

$$\boldsymbol{U : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}(G)_k) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{UA}(\mathrm{Sp}_k) : V}$$

が得られます。

離散対称 G スペクトラム

次の Proposition は ∞-categorical Barr-Beck theorem の条件を確かめることによって得られます。

Proposition (T.)

副有限群 G は仮想コホモロジー次元有限であり、局所化 L_k が Behrens-Davis の条件を満たすとする。このとき、∞-category の関手

$$U : \mathbf{Mod}_A(\mathbf{Sp}(G)_k) \longrightarrow \mathbf{Mod}_{UA}(\mathbf{Sp}_k)$$

はコモナド的である。したがって、$\mathbf{Mod}_A(\mathbf{Sp}(G)_k)$ はコモナド UV 上の左余加群の ∞-category と同値である。

Morava K 理論 $K(n)$ による局所化 $L_{K(n)}$ は Behrens-Davis の条件をみたすことに注意しておきます。

$K(n)$-local category のモデル

ここでは、$K(n)$-local category $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ のモデルを構成します。

素数 p と自然数 n を固定

Morava 安定化群 $\mathbb{G}_n$ は副有限群なので、離散対称 $\mathbb{G}_n$ スペクトラムの圏 $\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)$ を考えることができます。

Morava E 理論 E_n とその $\mathbb{G}_n$ 作用により、E_n を離散対称 $\mathbb{G}_n$ スペクトラムと思うことはできません。

しかし、Devinatz-Hopkins によるホモトピー固定点スペクトラムを用いることにより、E_n の離散モデル

$$F_n := \operatorname*{colim}_{U \triangleleft_o \mathbb{G}_n} E_n^{dhU} \in \Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)$$

を構成することができ、F_n は $\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)$ における可換モノイドになります。

$K(n)$-local category のモデル

このとき、Proposition より、

$$U : \mathbf{Mod}_{F_n}(\mathbf{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \to \mathbf{Mod}_{E_n}(\mathbf{Sp}_{K(n)})$$

はコモナド的であることがわかります。この随伴が定めるコモナドを D とします。

また、$L_{K(n)}S \to E_n$ が descendable であることから、∞-category の関手

$$L_{K(n)}(E_n \wedge (-)) : \mathbf{Sp}_{K(n)} \to \mathbf{Mod}_{E_n}(\mathbf{Sp}_{K(n)})$$

もコモナド的である。対応するコモナドを C とします。

このとき、任意の $M \in \mathbf{Mod}_{E_n}(\mathbf{Sp}_{K(n)})$ に対して、

$$C(M) \simeq D(M)$$

が成り立ちます。

$K(n)$-local category のモデル

よって、C と D は $\mathbf{Mod}_{E_n}(\mathbf{Sp}_{K(n)})$ 上のコモナドとして同値

また、$\mathbf{Sp}_{K(n)}$ は左 C 余加群の ∞-category と同値であり、$\mathbf{Mod}_{F_n}(\mathbf{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ は左 D 余加群の ∞-category と同値である。これより主定理が得られる。

Theorem (T.)

左 Quillen 関手

$$F_n \wedge (-) : \Sigma\mathbf{Sp}_{K(n)} \to \mathbf{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathbf{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$$

は Quillen 同値である。特に、$K(n)$-local category $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp}_{K(n)})$ はモデル圏 $\mathbf{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathbf{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ のホモトピー圏と (テンソル三角圏として) 同値である。

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp}_{K(n)}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathbf{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}))$$

ご清聴ありがとうございました。